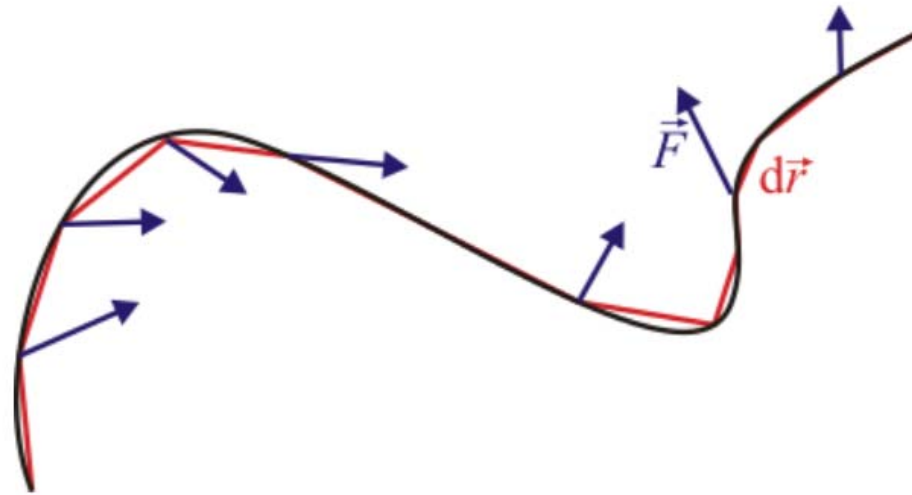


TRABAJO

Si tenemos una partícula que realiza una trayectoria arbitraria, sometida a una fuerza variable con la posición o el tiempo, podemos hallar el trabajo dividiendo el camino en diferenciales casi rectilíneos, calculando el trabajo (diferencial) en cada uno, y sumando (integrando) el resultado.

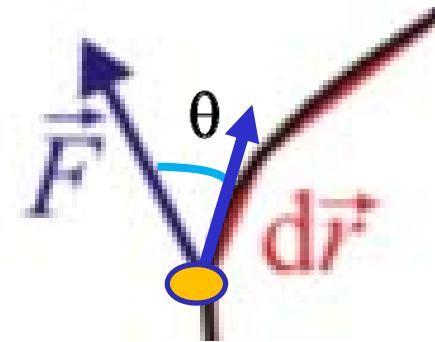


TRABAJO

Si representamos por ds la longitud de arco (medido sobre la trayectoria de la partícula) en el desplazamiento elemental $d\vec{r}$

Producto escalar

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \hat{e}_t ds = |\vec{F}| |d\vec{r}| \cos(\theta)$$

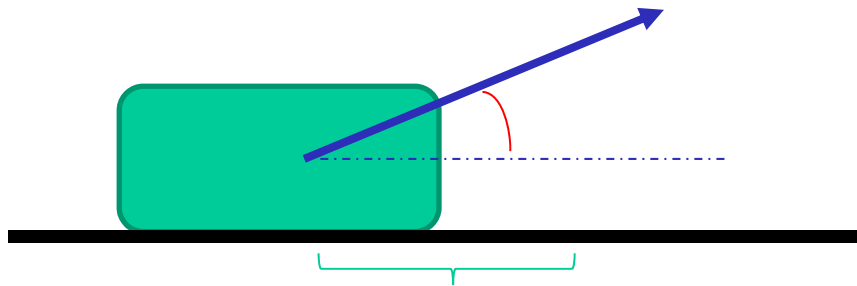


Observación: Consideramos la componente de F paralela a la trayectoria, es decir la componente tangencial.

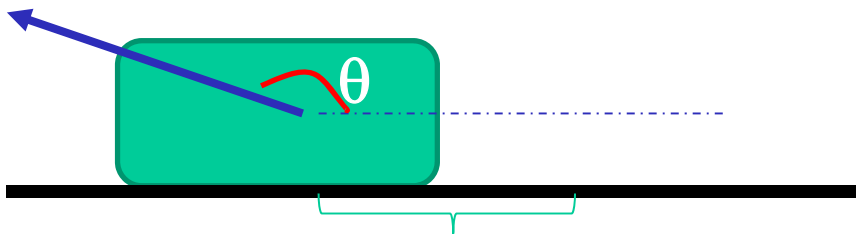
No se escribe dW sino δW porque no se puede calcular el trabajo en un punto. No existe el diferencial del W .

TRABAJO

$$\delta W = |\vec{F}| |d\vec{r}| \cos(\theta)$$

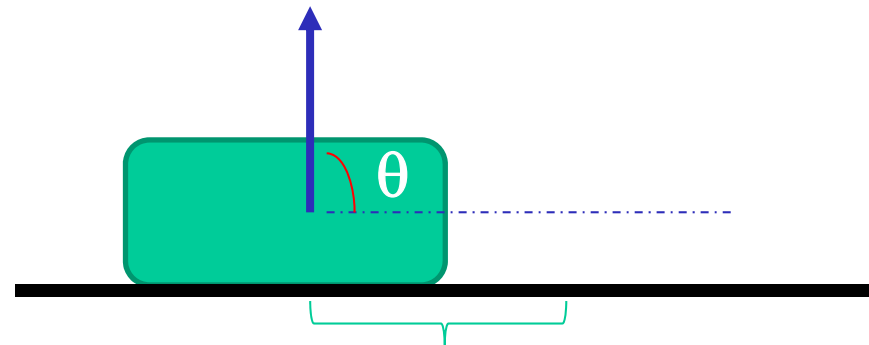


Si la fuerza y el desplazamiento tienen el mismo sentido, el trabajo es positivo. ($\cos(\theta) > 0$).



Si la fuerza y el desplazamiento tienen sentidos contrarios, el trabajo es negativo. ($\cos(\theta) < 0$).

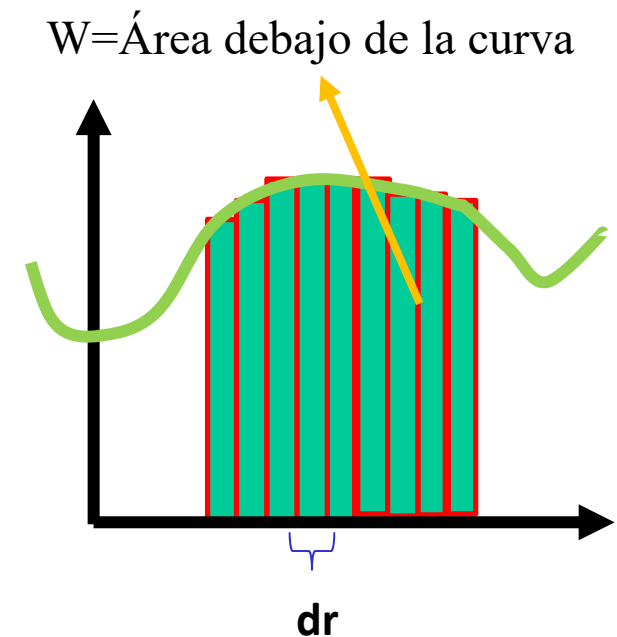
Si la fuerza es perpendicular al desplazamiento, el trabajo es nulo. ($\cos(90) = 0$).



TRABAJO

Si la partícula P recorre una cierta trayectoria (s) en el espacio, su desplazamiento total entre dos posiciones A y B puede considerarse como el resultado de sumar infinitos desplazamientos elementales dr y el trabajo total realizado por la fuerza F (que para este ejemplo es constante a lo largo de la curva), en ese desplazamiento, será la suma de todos esos trabajos elementales.

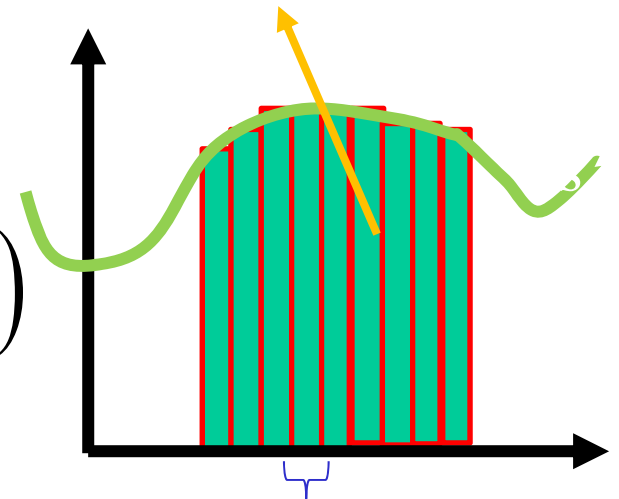
$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \int_A^B d\vec{r} = \vec{F} \cdot (\vec{r}_B - \vec{r}_A)$$



TRABAJO

El trabajo *depende del camino*: no nos basta con saber qué posición y qué velocidad tiene la partícula en un momento dado, sino que necesitamos saber qué curva ha descrito y qué fuerza ha actuado sobre ella en cada punto del camino. **El trabajo es por sí mismo una integral. No es el incremento ni la variación de nada.**

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \int_A^B d\vec{r} = \vec{F} \cdot (\vec{r}_B - \vec{r}_A)$$



Cómo se puede también resolver $W = \int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{r}$

Usando las componentes de la fuerza y del diferencial de posición.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} \\ d\vec{r} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k} \end{array} \right\} \vec{F} \bullet d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

Pero $z(x, y)$ es la ecuación de la trayectoria que relaciona a los respectivos diferenciales.

Otra forma de resolverlo

$$\vec{F} \bullet d\vec{r} = F \cos \alpha ds$$

donde α es el ángulo entre la fuerza y el diferencial de desplazamiento (o diferencial de línea). Como el desplazamiento es tangente a la trayectoria y la fuerza además puede variar (en módulo, dirección y/o sentido), este ángulo cambia con la trayectoria.

SÍNTESIS TRABAJO

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

- El trabajo es una **magnitud escalar**
- Se calcula en un determinado camino o trayectoria y **depende del camino**
- **No existe trabajo de un punto**, por lo tanto **no se puede** escribir al trabajo en un trayecto como $W_f - W_i$
En consecuencia **no existe dW**
- Cuando escribimos $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ estamos definiendo el trabajo de la fuerza en un trayecto dr
- La integral es **una integral de línea**
- Dentro de la integral hay **un producto escalar entre 2 vectores.**

POTENCIA

- En la definición de trabajo se descartó la dependencia con el tiempo.

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

- Cuando se necesita incluir el tiempo transcurrido se define la POTENCIA media de una fuerza como el trabajo realizado por la misma dividido el tiempo transcurrido.

$$\langle P \rangle = \frac{W}{\Delta t}$$

POTENCIA

- Cuando se necesita la POTENCIA instantánea de una fuerza como el trabajo realizado por la misma en un desplazamiento $d\vec{r}$, esto es $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r}$

(recordar que NO es un diferencial exacto, esto es que no se puede escribir como una diferencia de trabajos ya que NO EXISTE el trabajo en un punto)

dividido el tiempo transcurrido dt ,

$$P = \frac{\delta W}{dt}$$

Por lo anterior esto no es un cociente de incrementos por lo que NO es una derivada. Pero

$$P = \frac{\delta W}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

POTENCIA

En el sistema SI (mks), la potencia vendrá expresada en julios/segundo (J/s), unidad que recibe el nombre de watt (W), en honor al ingeniero británico J. WATT (1736-1819).



En los sistemas de unidades cgs y técnico las unidades de potencia son el erg/s y el kgm/s, respectivamente, que no reciben nombres especiales.

En la técnica son de uso frecuente las siguientes unidades de potencia: el **caballo de vapor (CV)**, el **horse power (HP)**, y el **kilovatio (kW)**

$$\begin{aligned}1 \text{ CV} &= 75 \text{ kgm/s} = 736 \text{ W} \\1 \text{ HP} &= 550 \text{ lb}\cdot\text{pie/s} = 746 \text{ W} \\1 \text{ kW} &= 1000 \text{ W} = 102.04 \text{ kgm/s}\end{aligned}$$

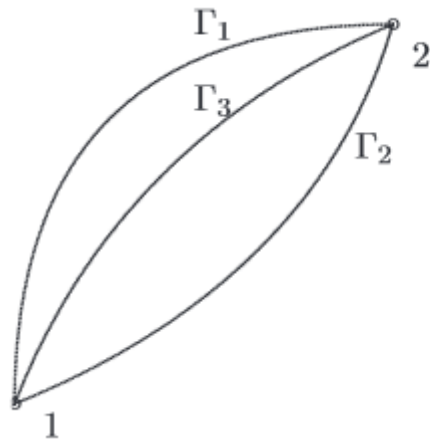
$$1 \text{ kWh} = (10^3 \text{ W}) (3.6 \times 10^3 \text{ s}) = 3.6 \times 10^6 \text{ J/s}$$

Definiciones de Fuerza Conservativa

1) Diremos que una fuerza es conservativa cuando el trabajo realizado por esa fuerza no depende de la trayectoria.

Si aplicamos esta definición, para asegurarnos que es conservativa, debemos probar los infinitos caminos que hay entre 1 y 2.

Una fuerza es no conservativa cuando el trabajo realizado por esa fuerza depende de la trayectoria



Trayectorias distintas en un campo conservativo para ir de 1 a 2.

$$\int_{\Gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Definiciones de Fuerza Conservativa

2) Es fácil ver que esta condición es equivalente a que el trabajo realizado para recorrer cualquier trayectoria cerrada sea nulo. De vuelta deberíamos demostrar que en todas las trayectorias es nulo.

$\Gamma = \Gamma_1^+ \cup \Gamma_2^-$ Γ Ésta puede descomponerse en dos curvas abiertas con extremos en 1 y 2

Γ_1^+ Sentido de 1 a 2

Γ_2^- Sentido de 2 a 1

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_1^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\Gamma_2^-} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_1^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{\Gamma_2^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

Definiciones de Fuerza Conservativa

3) Un teorema básico del cálculo vectorial establece que la condición necesaria y suficiente para que un campo vectorial F tenga circulación nula para cualquier curva cerrada es que sea un campo de gradientes (Teorema de Gauss).

Un campo vectorial F se dice conservativo si podemos escribirlo como el gradiente de alguna función escalar, es decir, si existe una función f tal que $F = \bar{\nabla}f$ para todo punto. En tal caso, f se llama función potencial de F .

Definiciones de Fuerza Conservativa

En particular en física definimos que una fuerza es conservativa cuando lo podemos escribirla como:

$$W = \overline{F} d\overline{r} = -\overline{\nabla} V \cdot d\overline{r} = -dV$$

$$\overline{F} = -\overline{\nabla} V \longrightarrow \text{grad } V \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial V}{\partial x_i} \mathbf{e}_i = \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{k}$$

Al campo escalar V se le denomina potencial de las fuerzas, energía potencial, o simplemente potencial

Definiciones de Fuerza Conservativa

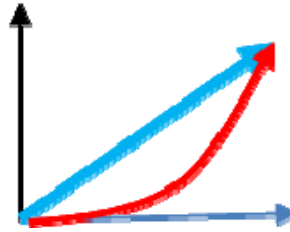
4) Una cuarta forma de caracterizar un campo F como conservativo, admitiendo las exigencias adicionales de que F tenga derivada continua y que el dominio sea simplemente conexo, es que sea irrotacional (Teorema de Stokes)

Si el vector F lo podemos escribir como el gradiente de una función escalar V , entonces el rotor de F es cero.

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V \iff \nabla \times \vec{F} = 0$$

Ejemplo (1) Fuerza Conservativa

Ejemplo: Calcular el trabajo efectuado por el campo de fuerzas $\vec{F} = 2xy\hat{i} + 3(x+y)\hat{j}$ para llevar una partícula del punto $A = (0, 0)$ al $B = (1, 1)$



a lo largo de la recta $x = y$:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} d\vec{r} = \int_{x_A, y=x}^{x_B} 2xy dx + \int_{y_A, x=y}^{y_B} 3(x+y) dy = \int_0^1 2x^2 dx + \int_0^1 6y dy = \frac{11}{3}$$

y a lo largo de la parábola $y = x^2$:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} d\vec{r} = \int_{x_A, y=x^2}^{x_B} 2xy dx + \int_{y_A, x=\sqrt{y}}^{y_B} 3(x+y) dy = \int_0^1 2x^3 dx + \int_0^1 3(\sqrt{y}+y) dy = \frac{7}{2}$$

NOTESE QUE el trabajo realizado es DISTINTO. El trabajo depende no sólo de los puntos inicial y final, sino que también depende del camino recorrido.

ENERGÍA CINÉTICA

Se **define** variación de energía cinética como:

$$\Delta E_c = W_{\text{todas las fuerzas}}$$

Para una partícula es equivalente al trabajo de la fuerza resultante

$$\Delta E_C = W_{\text{todas las fuerzas}} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

TEOREMA DE LAS FUERZAS VIVAS O TEOREMA DEL TRABAJO Y LA ENERGIA

El trabajo realizado por la resultante de las fuerzas sobre una partícula es igual al incremento de su energía cinética

$$\delta W = \vec{F} d\vec{r} = m \frac{dv}{dt} dr = mv dv$$
$$W_{total} = \int_A^B dW = \int_{v_A}^{v_B} mv dv = \frac{1}{2} m \Delta v^2$$

Es decir, si se hace un **trabajo positivo** sobre la partícula, **su energía cinética aumenta**, esto es, se mueve más rápido. Si por contra el **trabajo es negativo**, oponiéndose al movimiento, **la energía cinética disminuye** y la partícula se mueve más despacio.

TEOREMA DE LAS FUERZAS VIVAS O TEOREMA DEL TRABAJO Y LA ENERGIA

Vimos que si la fuerza es conservativa, la podemos escribir como el gradiente de una función potencial, así que el trabajo podemos escribirlo como variación de esa **energía potencial, después de integrar.**

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V$$

$$\begin{aligned} W_{fuerzas_conservativas} &= -(V_2 - V_1) \\ &= -\Delta E_{potencial} \end{aligned}$$

Por otro lado vimos que el:

$$W_{TOTAL} = \Delta E_{CINETICA} = \frac{1}{2} M (V_f^2 - V_0^2)$$

ENERGÍA MECÁNICA

$$W_{TOTAL} = W_{f_conservativas} + W_{f_noconservativas}$$



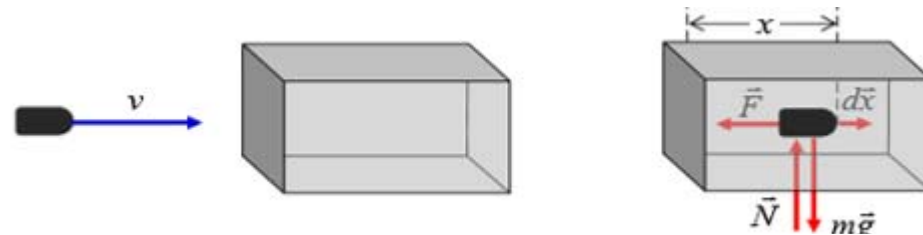
$$\Delta E_{cinetica} = -\Delta E_{potencial} + \Delta E_{mecanica}$$

$$W_{f_noconservativas} = \Delta E_{cinetica} + \Delta E_{potencial} = \Delta E_{mecanica}$$

PROBLEMAS: TRABAJO-ENERGIA

PROBLEMA 1

Una bala de masa 20 g que se mueve a 400 m/s penetra horizontalmente en un bloque de madera hasta una profundidad de 15 cm. ¿Cuál es la fuerza media que se ha realizado sobre la bala para detenerla? .



$$\int (\vec{F} + m\vec{g} + \vec{N}) d\vec{x} = \Delta E_c \rightarrow \int_0^{x_f} (F \cos 180^\circ + mg \cos 90^\circ + N \cos 270^\circ) dx = 0 - \frac{1}{2}mv^2$$

$$-\int_0^{x_f} F dx = -F x_f = -\frac{1}{2}mv^2 \rightarrow F = \frac{mv^2}{2x_f}$$

$$m = 2 \cdot 10^{-2} \text{ kg}$$

$$v = 4 \cdot 10^2 \text{ m/s}$$

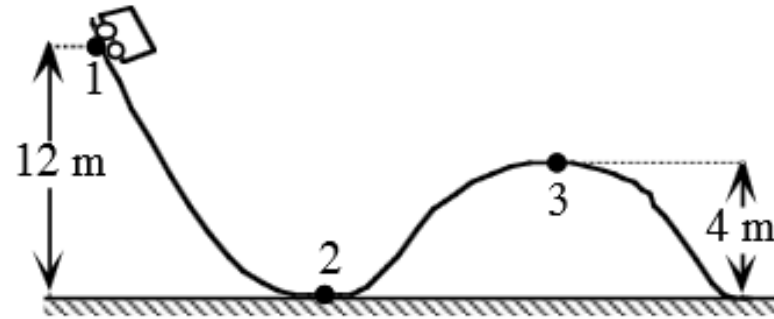
$$x_f = 15 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$F = 1.07 \cdot 10^4 \text{ N}$$

Nótese que esta fuerza es más de 50000 veces mayor que el peso de la bala

TRABAJO-ENERGIA

Una vagoneta de 1000 kg de peso parte del reposo en el punto 1 y desciende, sin rozamiento, por la vía indicada en la figura. a) Calcular la fuerza que la vía ejerce sobre la vagoneta en el punto 2, donde el radio de curvatura es de 6 m. b) Determinar el mínimo valor del radio de curvatura en el punto 3 para salvar dicho punto.

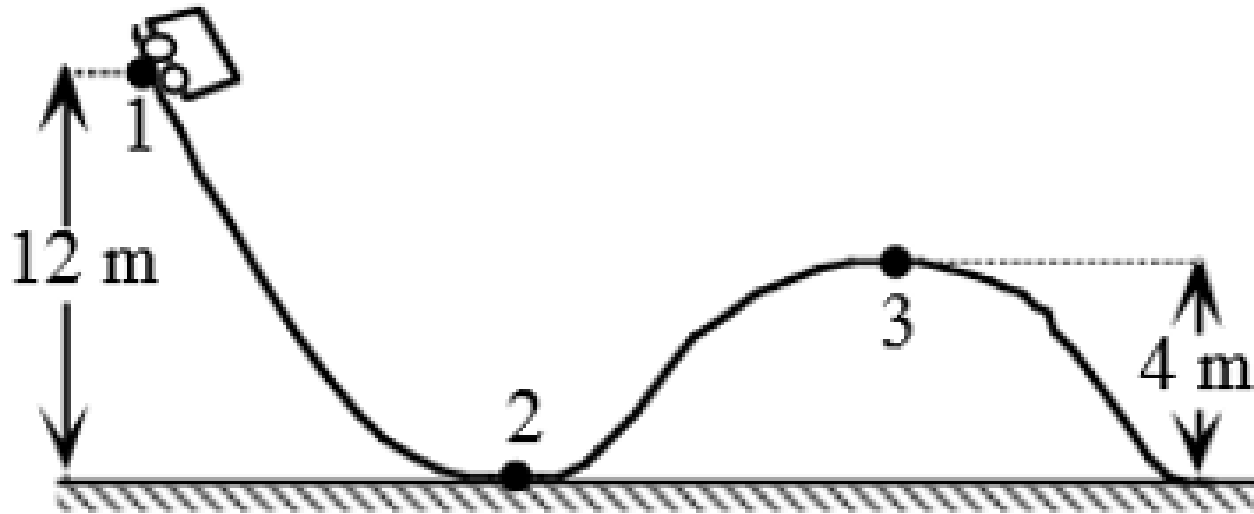


a) Fuerzas que actúan en 2

$$\hat{j}) N - mg = ma_{centripeta} = m \frac{v^2}{\rho}$$

¿Pero como podemos calcular la velocidad?

TRABAJO-ENERGIA



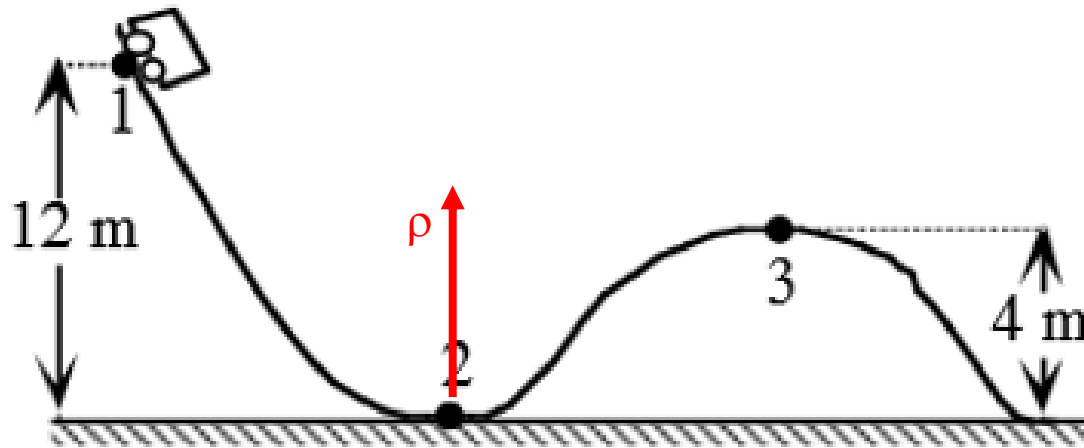
$$\Delta E_m = W_{f_{noconservativas}}$$

DADO QUE LAS FUERZAS QUE ACTUAN SON:
EL PESO Y ESTE ES CONSERVATIVO Y LA
NORMAL **N** NO REALIZA TRABAJO.

$$\Delta E_m = 0 \rightarrow mgh = \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow v^2 = 2gh$$

TRABAJO-ENERGIA

a) Fuerzas que actúan en 2

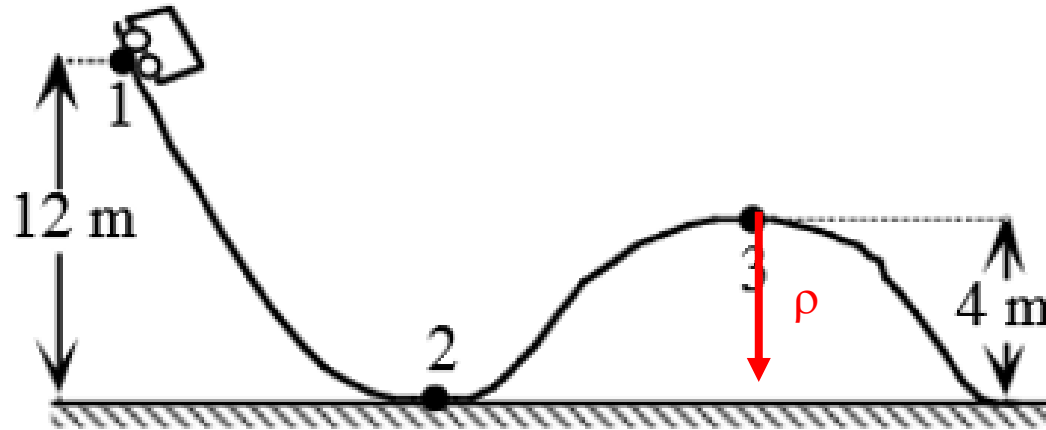


$$\hat{j}) N - mg = ma_{centripeta} = m \frac{v^2}{\rho}$$

$$\hat{j}) N = m \frac{v^2}{\rho} + mg = mg \left(\frac{2h}{\rho} + 1 \right)$$

TRABAJO-ENERGIA

Fuerzas que actúan en 3



$$\hat{j}) N - mg = -ma_{centripeta} = -m \frac{v^2}{\rho}$$

¿Pero como podemos calcular la velocidad?

TRABAJO-ENERGIA

Fuerzas que actúan en 3

$$\hat{j})N - mg = -ma_{centripeta} = -m\frac{v^2}{\rho}$$

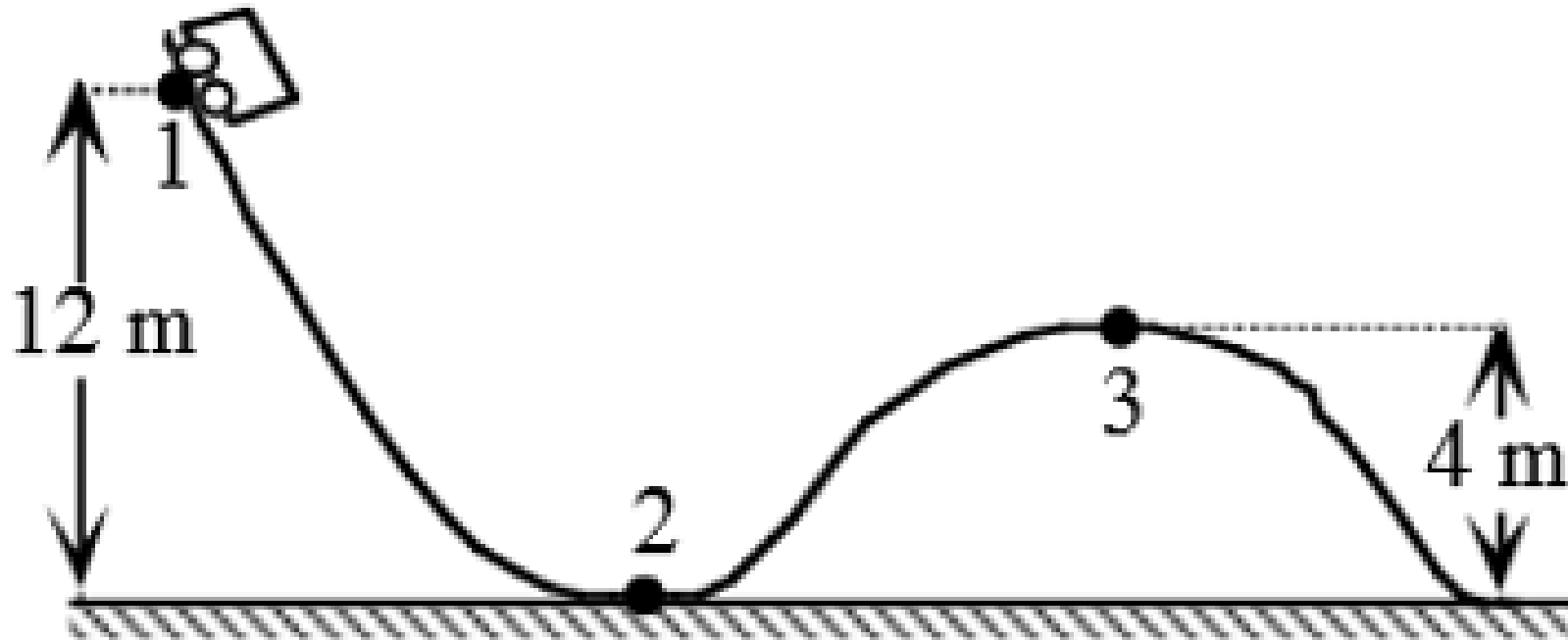
$$\hat{j})N = -m\frac{v^2}{\rho} + mg = mg\left(-\frac{2h}{\rho} + 1\right)$$

El valor mínimo para superarlo es decir que $N=0$

$$\frac{2h}{\rho} = 1 \rightarrow 2 \times (12m - 4m) = \rho = 16m$$

Pregunta de Dinámica

Si pusiéramos una balanza dentro del carro y asumiendo que el radio de curvatura en el punto 2 es igual al radio de curvatura en el punto 3 ($\rho_2 = \rho_3$). ¿Esta mediría lo mismo en la valle (punto 2) y en la cima (punto 3)?



Pregunta de Dinámica

Si pusiéramos una balanza dentro del carro y asumiendo que el radio de curvatura en el punto 2 es igual al radio de curvatura en el punto 3 (). ¿Esta mediría lo mismo en la valle (punto 2) y en la cima (punto 3)?

$$N = mg \left(\frac{2h}{\rho} + 1 \right) \quad N = mg \left(-\frac{2h}{\rho} + 1 \right)$$

valle cima

$$N_{\text{VALLE}} > N_{\text{CIMA}}$$

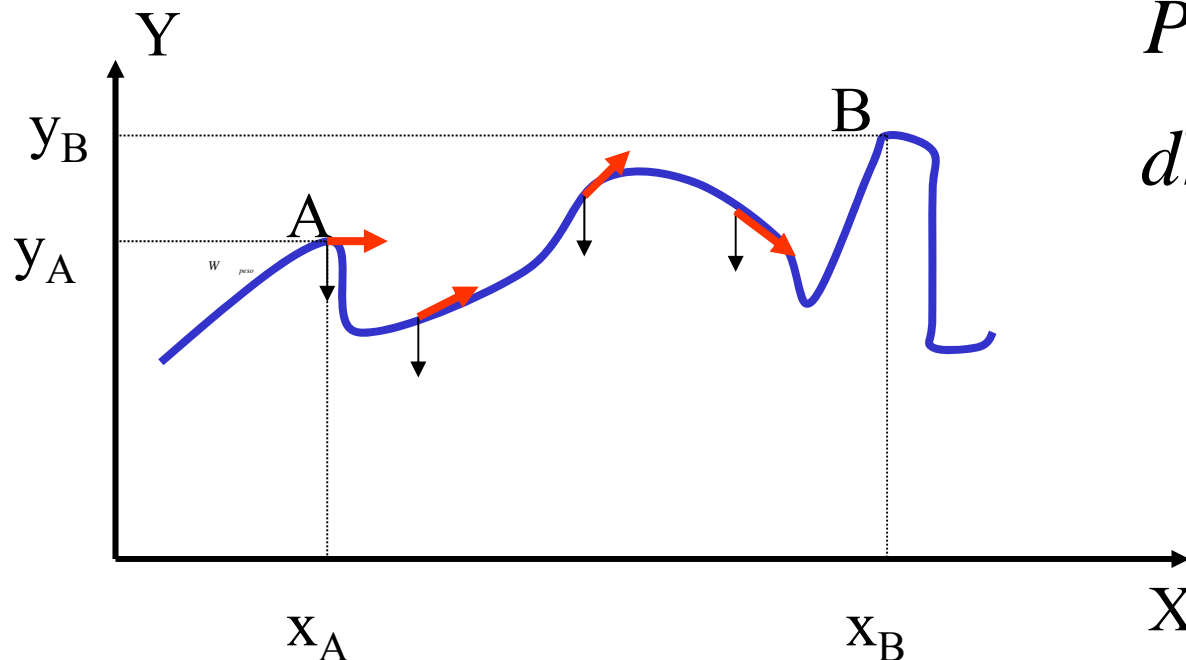
Energía potencial gravitatoria (1)

Estudiamos el caso más usado de la fuerza gravitatoria en las cercanías de la Tierra, **es decir cuando**

$F_{\text{gravitatoria}} = mg$, ya que es una fuerza conservativa

$$\Delta E_{Pg} = -W_{\text{peso}}$$

Calculemos el trabajo del peso, cuando una partícula se desplaza de un punto A hasta un punto B de una trayectoria cualquiera



$$\vec{P} = -mg \hat{j}$$

$$d\vec{r} = dx \hat{i} + dy \hat{j}$$

En cada punto el peso es igual pero el desplazamiento tiene distinta dirección

$$W_{\text{peso}} = \int_A^B \vec{P} \bullet d\vec{r} = \int_A^B (p_x dx + p_y dy)$$

$$W_{\text{peso}} = \int_A^B (0 dx - mg dy) = - \int_{y_A}^{y_B} mg dy$$

$$W_{\text{peso}} = -mg(y_B - y_A) = -\Delta E_{pg}$$

Por lo tanto

$$\Delta E_{pg} = -W_{\text{peso}} = m g y_B - m g y_A$$

$$\Delta E_{pg} = -W_{peso} = m g y_B - m g y_A$$

• La energía potencial de cualquier fuerza conservativa se define a partir de su variación.

• Esto es lo mismo que decir que

$$E_{pgB} = m g y_B + cte$$

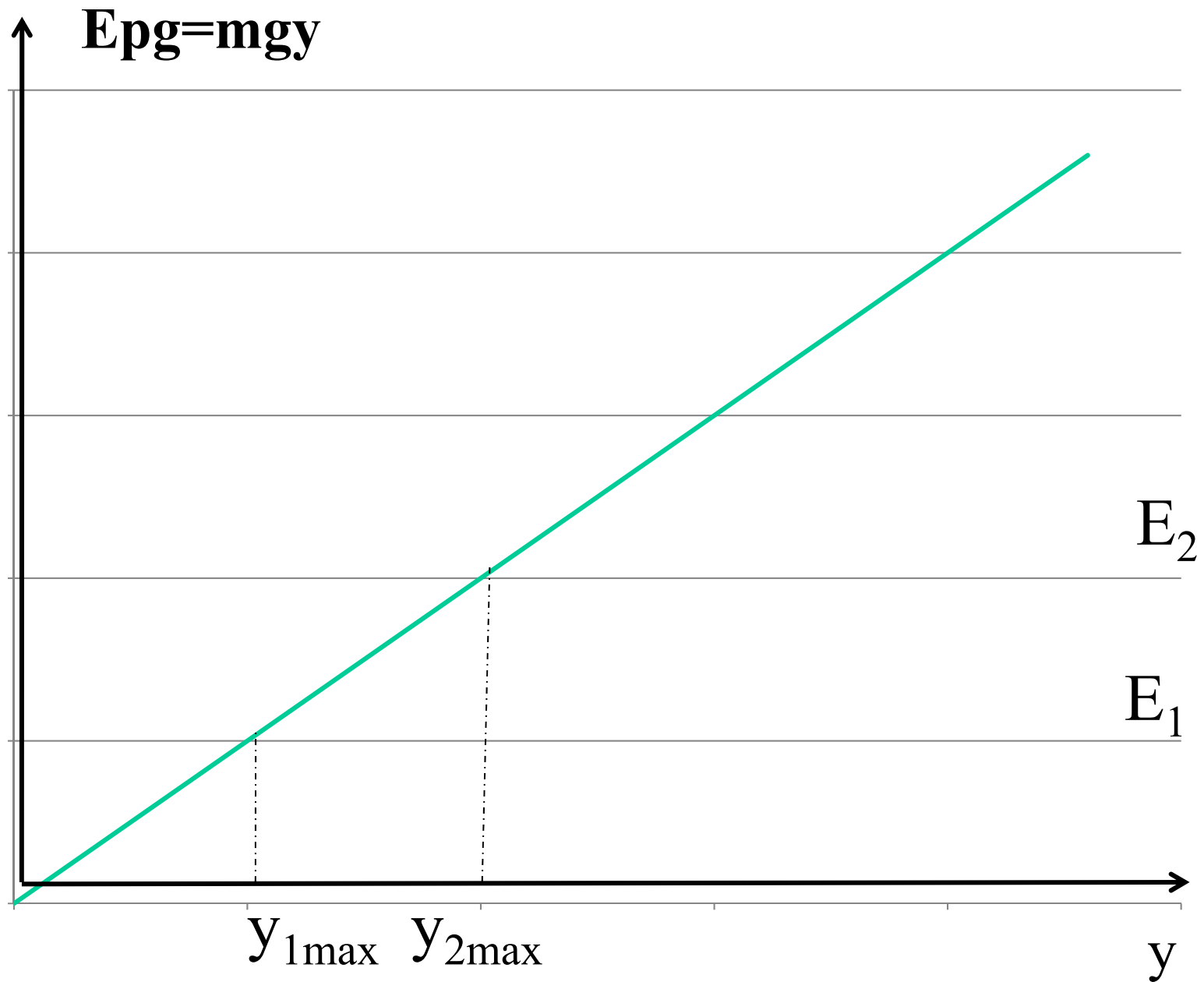
• Al restar se elimina la constante

• La constante depende del punto que se elija como de energía potencial nula. SIEMPRE hay que indicarlo.

• Si elegimos que el punto $y=0$ es el punto de energía potencial nula entonces la $cte=0$.

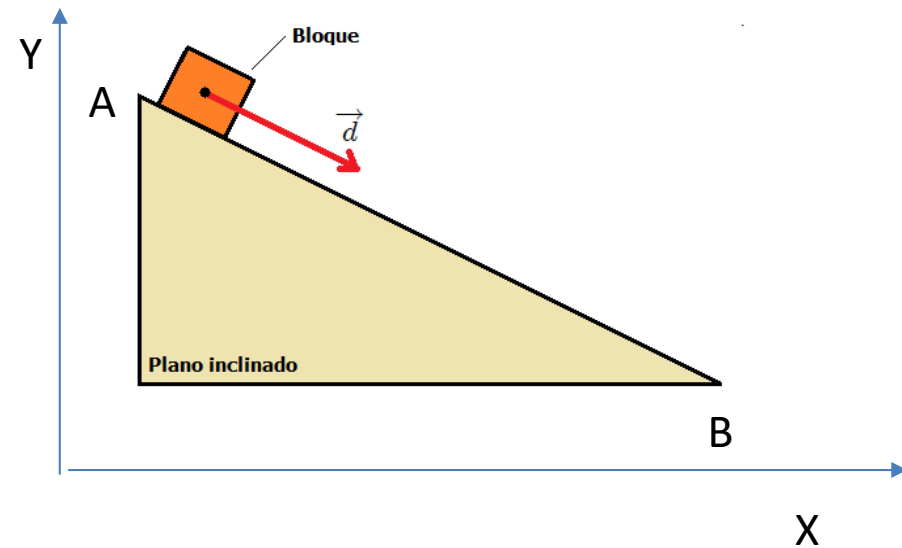
• ATENCIÓN: esta definición de energía potencial gravitatoria vale para el eje y tomado, es decir positivo hacia arriba. Si se toma otro eje hay que hacer nuevamente la deducción.

• Como el trabajo no depende del camino, la expresión sirve para cualquier trayectoria. No tenemos que calcularla otra vez.



Ejemplo (2) de Fuerzas Conservativas

Fuerza Peso



$$\vec{F} = -m g \hat{j}$$

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_A^B m g \hat{j} \cdot (dx \hat{i} + dy \hat{j})$$

$$= - \int_A^B m g dy = -(mgy_B - mgy_A)$$

$$W_{AB} = U_A - U_B \quad \Rightarrow \quad \boxed{U(y) = m g y}$$

Energía potencial gravitatoria (2)

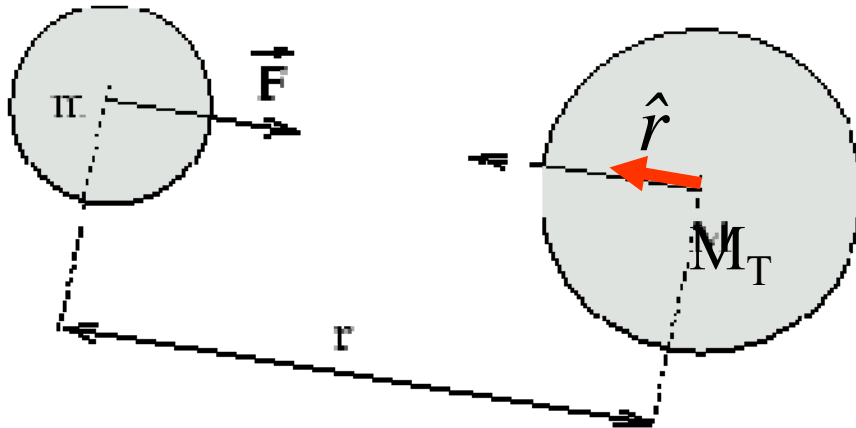
Estudiamos el caso general de la fuerza gravitatoria de la Tierra, a cualquier distancia de la misma

$$\Delta E_{pG} = - W_{FGravitatoria}$$

Calculemos primero el trabajo de la fuerza gravitatoria cuando una partícula se aleja de la Tierra

$$\vec{F} = -\frac{G M_T m}{r^2} \hat{r}$$

$$d\vec{r} = dr \hat{r}$$

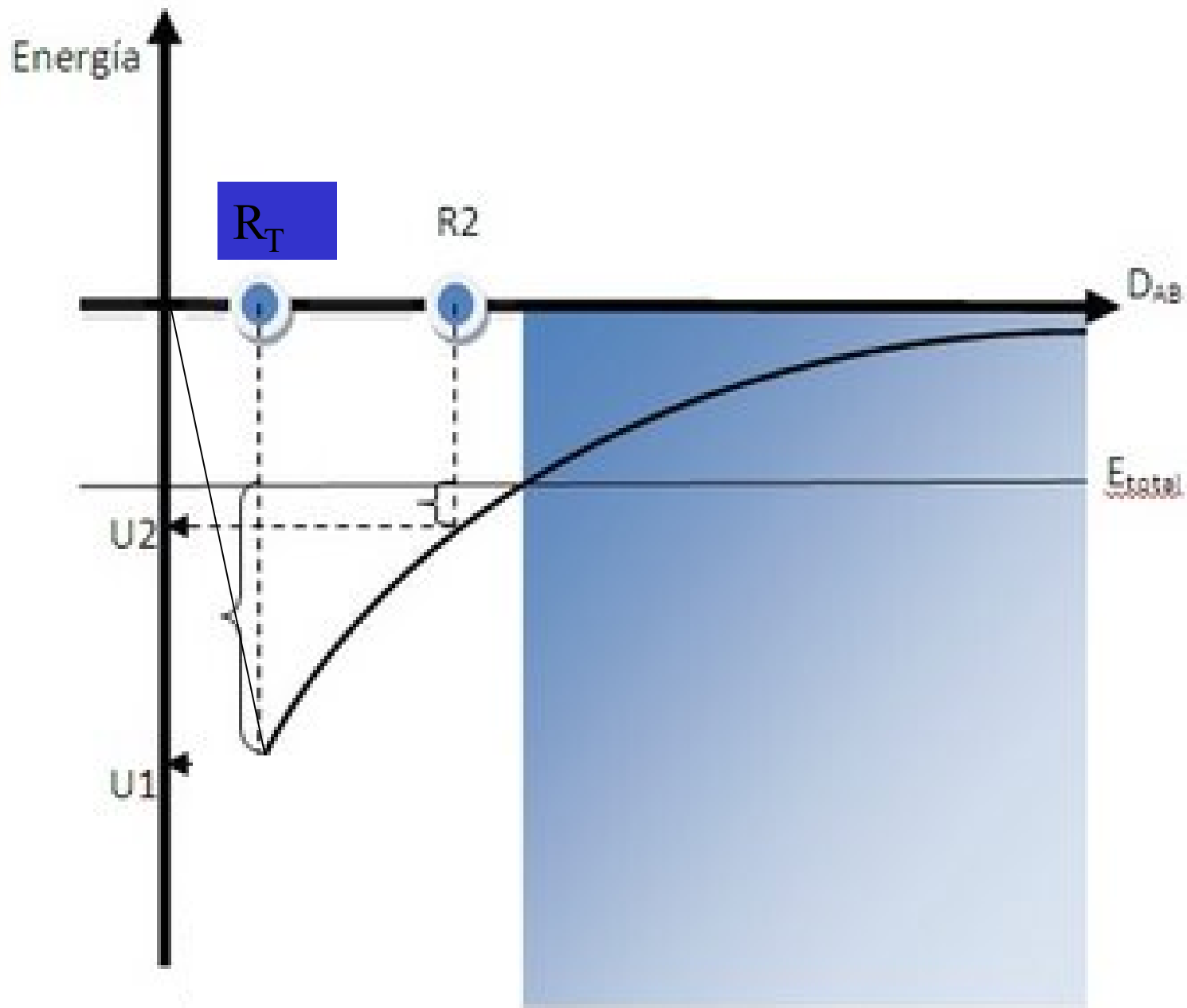


$$W_{FG} = \int_A^B \vec{F}_G \cdot d\vec{r} = - \int_A^B \frac{GM_T m}{r^2} dr (\hat{r} \cdot \hat{r})$$

$$W_{FG} = -GM_T m \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = -GM_T m \left(-\frac{1}{r} \right)_{r_A}^{r_B}$$

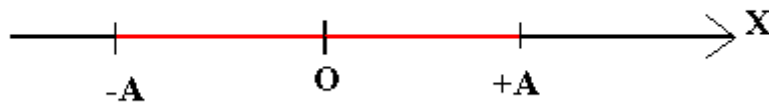
$$W_{FG} = GM_T m \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) = -\Delta E_{pG}$$

$$\Delta E_{pG} = -W_{FG \text{ Gravitatoria}} = - \left(\frac{GM_T m}{r_B} - \frac{GM_T m}{r_A} \right)$$

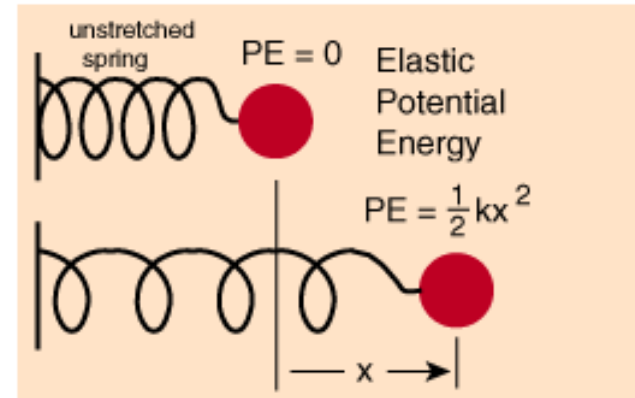


Energía potencial elástica

- El movimiento de un resorte sin rozamiento es un MAS.



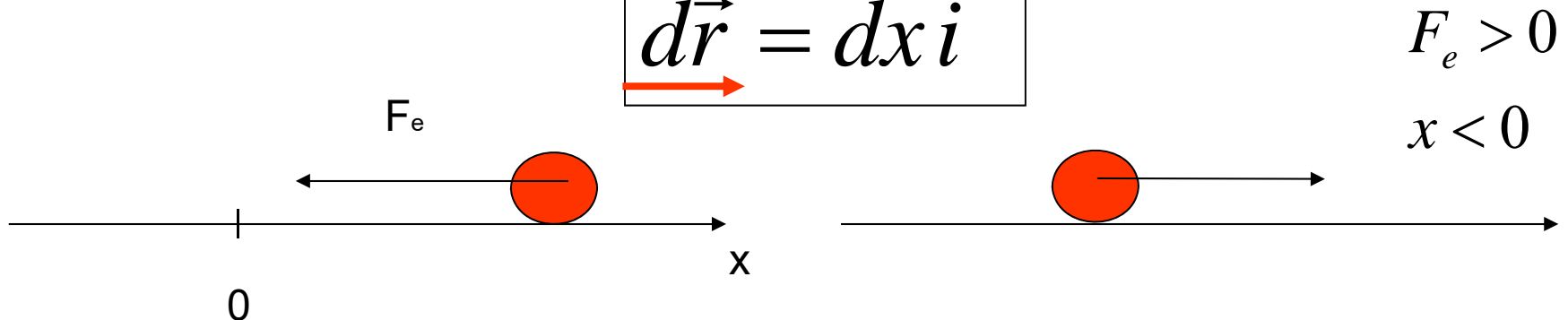
donde
 A es la amplitud.
 ω la frecuencia angular.
 $\omega t + \varphi$ la fase.
 φ la fase inicial.



$$\vec{F}_e = -k \vec{x}$$

$$d\vec{r} = dx \hat{i}$$

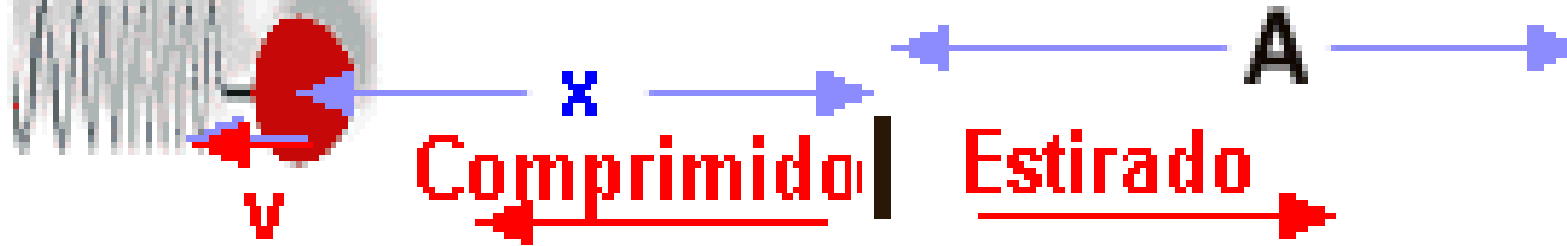
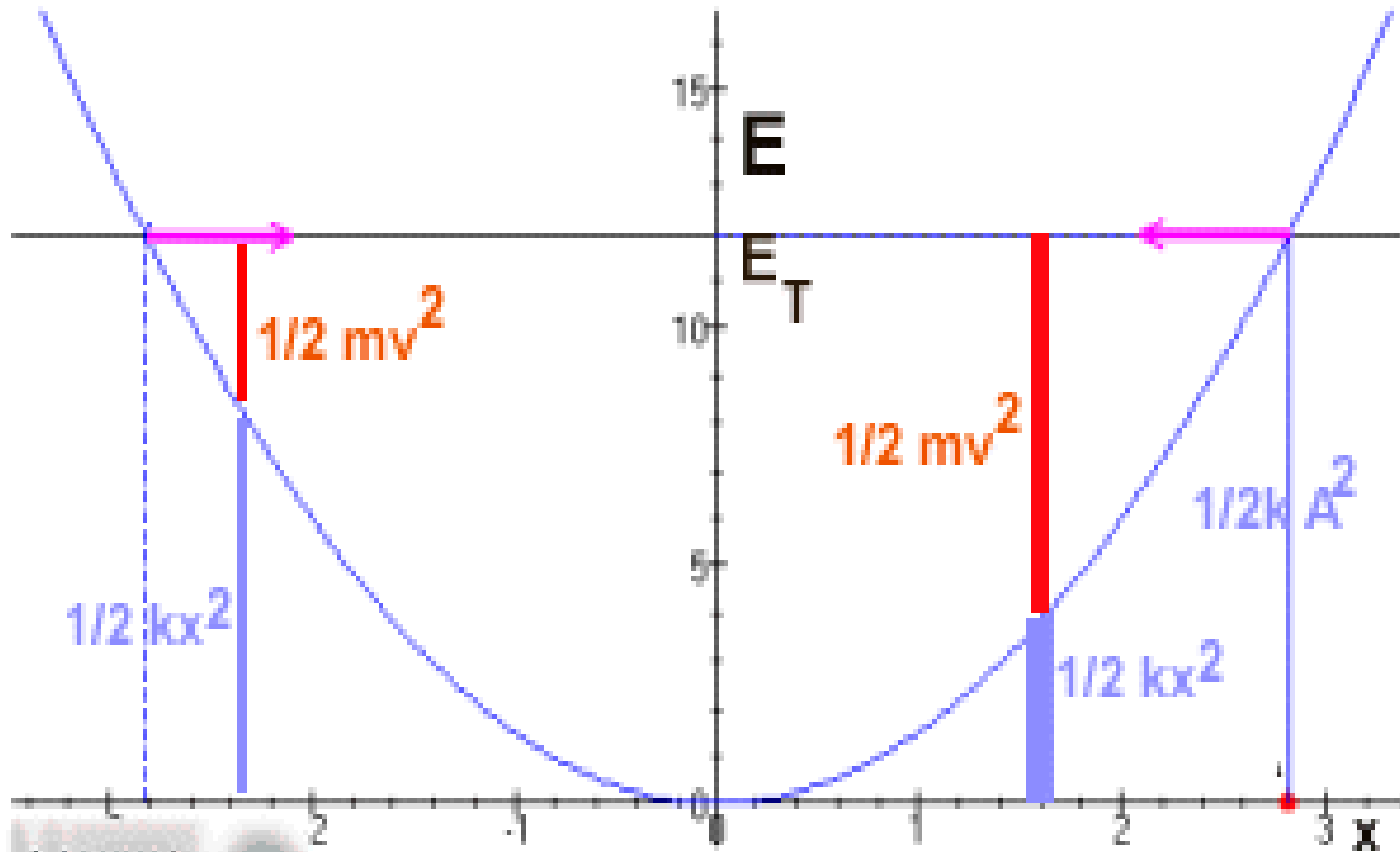
Ley de Hooke:



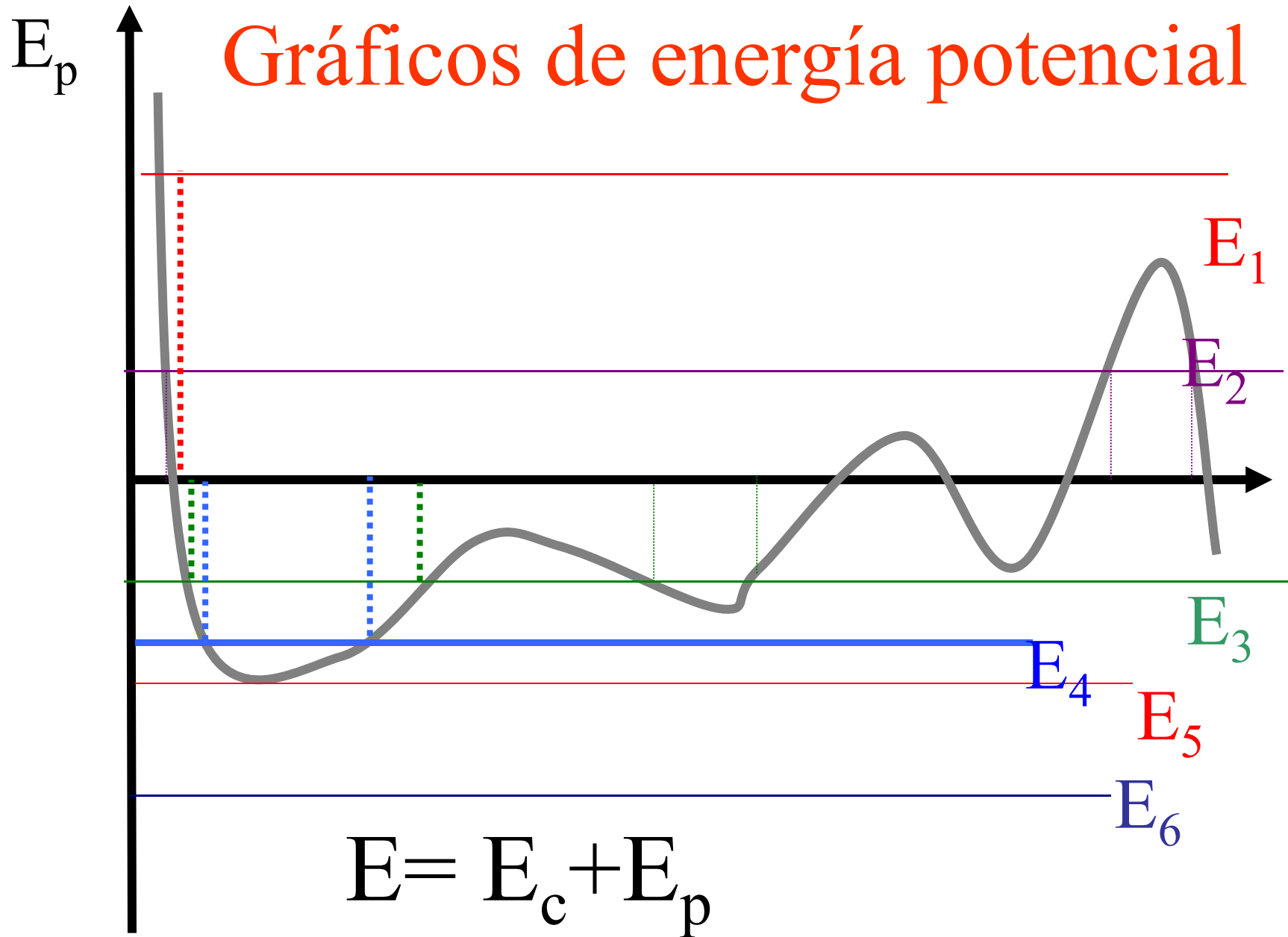
$$W_{Fe} = \int_A^B \vec{F}_e \cdot d\vec{r} = - \int_A^B kx \, dx (\hat{i} \cdot \hat{i})$$

$$W_{FG} = -k \left(\frac{x^2}{2} \right) \Big|_{x_A}^{x_B} = -\frac{k}{2} (x_B^2 - x_A^2) = -\Delta E_{pe}$$

$$\Delta E_{pe} = -W_{Fzaelàstica} = \frac{1}{2} k x_B^2 - \frac{1}{2} k x_A^2$$



Gráficos de energía potencial



$$E = E_c + E_p$$

$$E_c = 1/2 m v^2 > 0$$

SÍNTESIS Ep (las más usadas)

$$\Delta E_{pg} = -W_{peso} = m g h_B - m g h_A$$

$$\Delta E_{pe} = -W_{Fzaelástica} = \frac{1}{2} k x_B^2 - \frac{1}{2} k x_A^2$$

Si no se pide la deducción se pueden usar resultados directamente cada vez que tengamos que calcular el trabajo o la variación de energía potencial del peso o de la fuerza elástica.

SÍNTESIS E_p

- Cuando se conoce el gráfico de la energía potencial en función del tiempo se pueden obtener las zonas en las cuales es posible que se encuentre la partícula afectada por ese potencial, para un determinado valor de la energía mecánica.
- Si la energía mecánica se conserva permanecerá constante y se graficará como una recta horizontal sobre el gráfico de energía potencial
- La diferencia entre la energía mecánica y la potencial es la energía cinética que, en el caso de la mecánica clásica, no puede ser negativa.
- Esta última condición es la que permite hallar las zonas permitidas y las prohibidas para cada valor de energía.

SÍNTESIS

Energía mecánica

$$\Delta E_c = W_{\text{todas las fuerzas}}$$

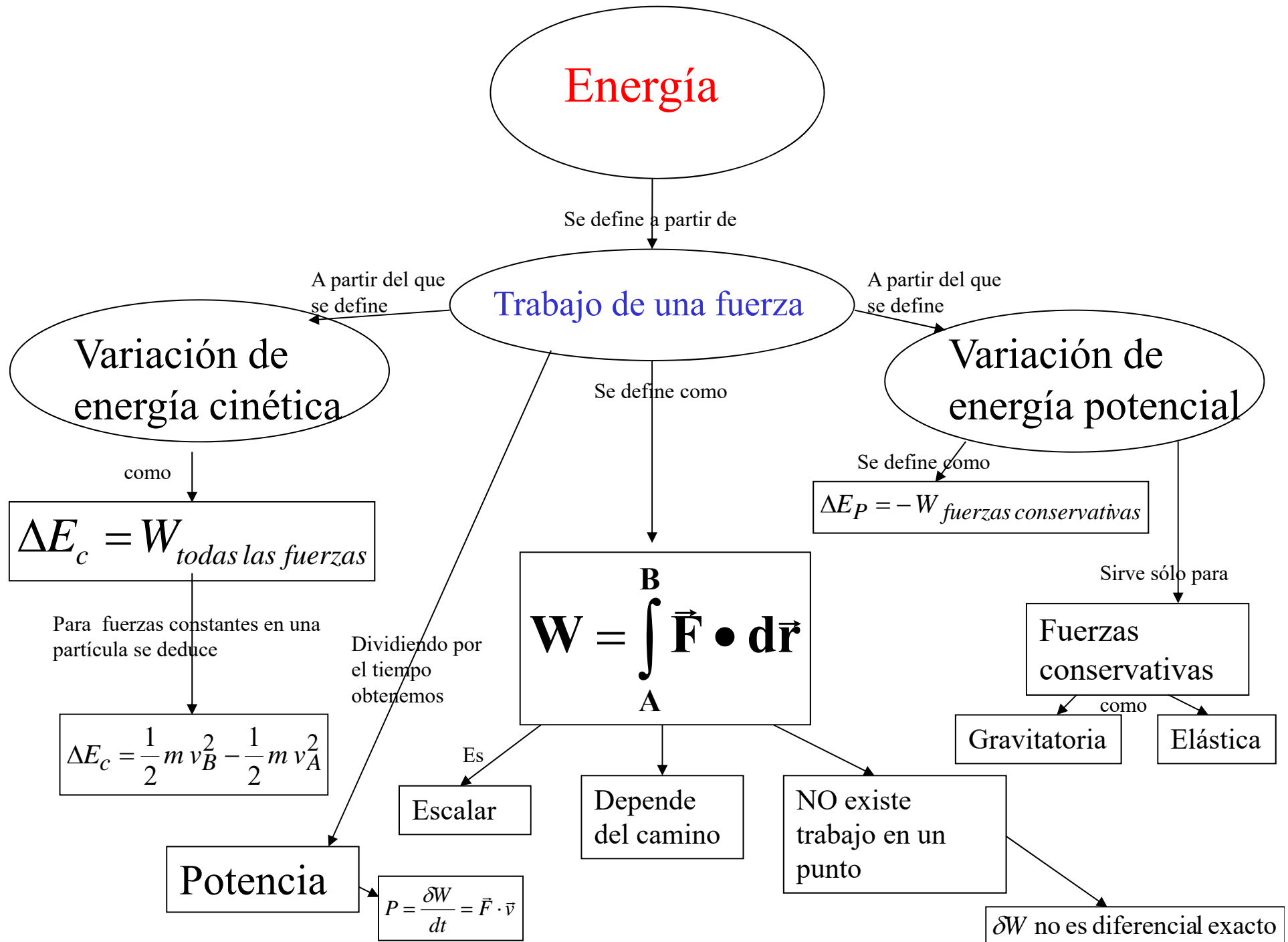
$$\Delta E_p = -W_{\text{fuerzas conservativas}}$$

$$\Delta E = \Delta E_c + \Delta E_p = W_{\text{Fuerzas no conservativas}}$$

Teorema de Conservación de la Energía

$$\Delta E = W_{\text{fuerzas no conservativas}}$$

$$\Rightarrow E = cte \Leftrightarrow W_{FNC} = 0$$



Definiciones de Fuerza Conservativa

$$\text{rot}(F) = \nabla \times F = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \hat{k}$$

Propiedades del Rotacional.

1. Si el campo escalar $f(x, y, z)$ tiene derivadas parciales continuas de segundo orden entonces el $\text{rot}(\nabla f) = \vec{0}$.
2. Si $F(x, y, z)$ es un campo vectorial conservativo entonces $\text{rot}(F) = \vec{0}$.
3. Si el campo vectorial $F(x, y, z)$ es una función definida sobre todo \mathbb{R}^3 cuyas componentes tienen derivadas parciales continuas y el $\text{rot}(F) = \vec{0}$ entonces F es un campo vectorial conservativo.